XXI Variables aléatoires

XXI.A Questions de cours :

1. Espérance et variance d'une loi géométrique
2. Formule de transfert
3. Inégalité de Markov

XXI.B Exercices :

Exercice 1: * (Formule de Wald)**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace Ω identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$ et (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
On suppose que $(N, X_1, \dots, X_n, \dots)$ sont mutuellement indépendantes et on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Montrer

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N).$$

Exercice 2: ** poisson et Poisson

Soit X une variable aléatoire comptant le nombre d'œufs pondus par un poisson ; La variable aléatoire X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Chaque œuf a une probabilité p d'éclore, indépendamment des autres œufs. Soit Z le nombre d'œufs qui ont éclos.

1. Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(Z = k | X = n)$.
2. En déduire la loi de Z ?
3. Quelle est l'espérance de Z ?

Exercice 3: ** De la chance vraiment ?

Pierre et Quentin jouent au jeu suivant. On tire un nombre entier naturel X au hasard, et on suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $a > 0$. Si X est impair, Pierre gagne et reçoit X euros de Quentin. Si X est pair supérieur ou égal à 2, Quentin gagne et reçoit X euros de Pierre. Si $X = 0$, la partie est nulle. On note p la probabilité que Pierre gagne et q la probabilité que Quentin gagne.

1. En calculant $p + q$ et $p - q$, déterminer la valeur de p et de q.
2. Déterminer l'espérance des gains de chacun.

Exercice 4: ** Loi du min

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité et suivant une loi géométrique de paramètre respectif p_1 et p_2. On pose $Z = \min(X, Y)$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X > n)$.
2. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Z > n)$.
3. Déterminer la loi de Z.

Exercice 5: *** Le problème du concierge

Un concierge rentre d'une soirée. Il dispose de n clés dont une seule ouvre la porte de son domicile, mais il ne sait plus laquelle.

1. Il essaie les clés les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clé qui n'a pas convenu. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.
2. En réalité, la soirée était bien arrosée, et après chaque essai, le concierge remet la clé essayée dans le trousseau. Trouver le nombre moyen d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.

Exercice 6: ** min de deux lois géométriques i.i.d

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On pose $Z = \min(X, Y)$ et $q = 1 - p$.
Soit n un entier strictement positif.

1. Calculer $\mathbb{P}(X \geq n)$.
2. Calculer $\mathbb{P}(Z \geq n)$. En déduire $\mathbb{P}(Z = n)$. Quelle est la loi de Z ?
3. Les variables X et Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 7: **** Inégalité de Cantelli

Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

1. Démontrez que, pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \frac{t^2+V(X)}{(a+t)^2}$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \frac{V(X)}{V(X)+a^2}$.
3. Démontrez l'inégalité de Cantelli : $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{2V(X)}{V(X)+a^2}$. Comparez avec l'inégalité de Tchebychev.

Exercice 8: **

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 9: ****

Deux joueurs A et B jouent à pile ou face avec un dé équilibré. Le joueur A gagne dès que la séquence PPF apparaît. Le joueur B gagne dès que la séquence FPF apparaît. Le jeu s'arrête lorsque l'un des joueurs a gagné.

1. Quelle est la probabilité que le joueur A gagne ?
2. Quelle est la probabilité que le joueur B gagne ?
3. Quelle est la probabilité que le jeu se poursuive indéfiniment sans qu'aucun des deux joueurs ne gagne ?

Exercice 10: **

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}((X,Y) = (j,k)) = \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{e\, j!\, k!}.$$

Déterminer les lois marginales de X et de Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 11: **

Un livre contient 4 erreurs, numérotées de 1 à 4, et est relié par une suite de relectures pour correction. À chaque relecture, chaque erreur est corrigée avec une probabilité $\frac{1}{3}$. Les erreurs sont corrigées de manière indépendante les unes des autres, et les relectures sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que l'erreur numéro 1 ne soit pas corrigée à l'issue de la n-ième relecture ?
2. Quelle est la probabilité que le livre soit entièrement corrigé à l'issue de la n-ième relecture ? Combien faut-il de relectures pour que cette probabilité soit supérieure à 0.9 ?

Exercice 12: **

Deux joueurs A et B s'affrontent autour d'un jeu. A joue la première partie, B joue la deuxième, A joue la troisième, et ainsi de suite. Les deux joueurs jouent $2n$ parties, et le premier qui gagne une partie a gagné l'ensemble du jeu. On suppose que A a une probabilité $a \in [0,1]$ de gagner une partie donnée, B une probabilité $b \in [0,1]$, et que les parties sont indépendantes les unes des autres.

1. Quelle est la probabilité que ni A ni B ne gagne ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne ? que B gagne ?
3. À quelle condition le jeu est-il équilibré ?

Exercice 13: * (Loi de Poisson)

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 14: *** (La loi sans mémoire)

On dit qu'une variable aléatoire est sans mémoire si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(X > k + n \mid X > n) = P(X > k).$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que X est sans mémoire.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire sans mémoire. On pose $q = P(X > 1)$.
   a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X > n) = q^n$.
   b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Exercice 15: ** (Diviseurs)**

Soit $n \geq 2$; on choisit de manière équiprobable un des entiers compris entre 1 et n ; soit p un diviseur de n et A_p l'événement : le nombre choisi est divisible par p.

1. Calculer $\mathbb{P}(A_p)$.
2. Montrer que si $p_1, \dots, p_r$ sont les diviseurs premiers de n, les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. En déduire le calcul de $\varphi(n)$.

Exercice 16: * Loi des deux premiers piles

On considère une suite de lancers de pile ou face indépendants, la probabilité d'obtenir pile étant $p \in]0,1[$. On note X (respectivement Y) le rang du premier (respectivement du deuxième) pile.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de Y.

Exercice 17: * Question de naissances**

On suppose que le nombre N d'enfants dans une famille suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $p \in]0,1[$ et celle que ce soit un garçon est $q = 1 - p$. On suppose aussi que les sexes des naissances successives sont indépendants. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles par famille, et Y celle du nombre de garçons.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (N, X).
2. En déduire la loi de X et celle de Y.